Межрегиональная олимпиада
школьников на базе
ведомственных образовательных организаций
по математике

УСЛОВИЯ И РЕШЕНИЯ

Москва 2018

Оглавление

9 КЛАСС

Вариант 1

1. Сравните числа $(10^{2017}+10^{2016}+\cdots+10+1)^{2018}$ и $(10^{2018}+10^{2017}+\cdots+10+1)^{2017}$.

Решение. Обозначим

$$A=(10^{2017}+10^{2016}+\cdots+10+1)^{2018},\qquad B=(10^{2018}+10^{2017}+\cdots+10+1)^{2017}.$$

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, находим:

$$A=\frac{(10^{2018}-1)^{2018}}{9^{2018}},\qquad B=\frac{(10^{2019}-1)^{2017}}{9^{2017}}.$$

Обозначим $a=10^{2018}$. Оценим разность:

$$A-B=9^{-2018}\cdot((a-1)^{2018}-9\cdot(10a-1)^{2017})=9^{-2018}\cdot C.$$

Здесь $C=(a-1)^{2018}-9\cdot(10a-1)^{2017}$. Определим знак C. Увеличим вычитаемое, заменив $10a-1$ на $10a$:

$$C>(a-1)^{2018}-9\cdot(10a)^{2017}=(a-1)^{2018}-0{,}9\cdot a^{2018}.$$

Знак последнего выражения, очевидно, совпадает со знаком разности $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}-0{,}9$. Заметим, что $\frac{a-1}{a}>\frac{a-2}{a-1}>\frac{a-3}{a-2}>\cdots>\frac{a-2018}{a-2017}$. Следовательно,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}>\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a-2}{a-1}\cdot\frac{a-3}{a-2}\cdot\ldots\cdot\frac{a-2018}{a-2017}=\frac{a-2018}{a}.$$

Далее, $\frac{a-2018}{a}>0{,}9$, так как $0{,}1\cdot a>2018$. Следовательно, разность $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}-0{,}9$, а вместе с ней и C положительны. Следовательно, первое число больше второго.

Ответ: Первое число больше второго.

2. Найдите все четные натуральные числа n у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{2}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1,2,3,4,6,12.)

Решение. Пусть каноническое разложение числа n имеет вид: $n=2^{t_1}\cdot 3^{t_2}\cdot 5^{t_3}\cdot\ldots\cdot p^{t_k}$. Тогда количество делителей числа n равно $(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1)$. Из условия задачи имеем равенство:

$(t_1+1)(t_2+1)(t_3+1)\cdots(t_k+1)=2^{t_1-1}\cdot 3^{t_2}\cdot 5^{t_3}\cdot\ldots\cdot p^{t_k}$. (*)

Заметим, что $2^{t_1-1}>t_1+1$ при $t_1\geq 4$, $3^{t_2}>t_2+1$ при $t_2\geq 1$, …, $p^{t_k}>t_k+1$ при $t_k\geq 1$. Следовательно, t_1 может принимать значения 1, 2 или 3. Подставляя указанные значения в равенство (*), найдём, что $n=8$ или $n=12$.

Ответ: $\{8,12\}$.

3. Сколькими способами из первых n натуральных чисел $1,2,\ldots,n$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

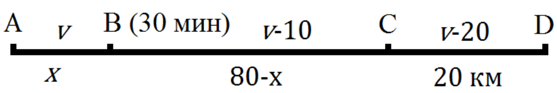
Решение. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n-3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n-3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n-6$, … , количество прогрессий с разностью d равно $n-3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1+3d\leq n$(если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1+3d$, не превосходит

n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max} = \left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

$$(n-3)+(n-6)+\cdots+(n-3k)=\frac{(2n-3k-3)k}{2}, \text{где } k=d_{max}.$$

Ответ: $\frac{(2n-3k-3)k}{2}$, где $k = \left[\frac{n-1}{3}\right]$.

4. Из пункта A в пункт D, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. Дорога из A в D проходит через пункты B и C. В пункте B навигатор показал, что ехать осталось 30 мин, и автомобилист тут же снизил скорость на 10 км/ч. В пункте C навигатор показал, что ехать осталось 20 км, и автомобилист сразу же второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D.



Решение. По условию, расстояние от C до D равно 20 км. Обозначим расстояние от A до B через x (км), тогда расстояние от B до C составит $(80-x)$ км. Пусть $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках BC и CD она равна $(v-10)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v-20)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от B до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть

$$100-x=\frac{v}{2}. \qquad (1)$$

Далее, на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D:

$$\frac{80-x}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12}. \qquad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v:

$$\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v > 20$.

Ответ: $100\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

5. Про натуральные числа a, b, c известно следующее:

- a^b делится на c;
- b^c делится на a;
- c^a делится на b.

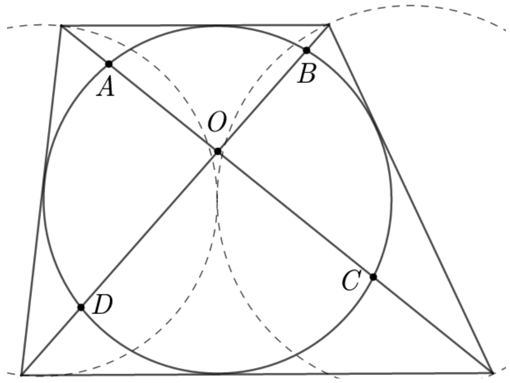
Докажите, что $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на произведение abc.

Решение.

Пусть p – простой делитель числа a. Тогда из 2-го условия следует, что b делится на p, а из 3-го – что c делится на p. Следовательно, $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на p^{a+b+c}. Пусть n, k, t – наибольшие натуральные числа такие, что a делится на p^n, b делится на p^k, c делится на p^t. Значит, в каноническое разложение произведения abc простое число p входит в степени $n+k+t$. Но, очевидно, $a > n$, $b > k$, $c > t$. Поэтому $a+b+c > n+k+t$ и, следовательно, число $(a+b+c)^{a+b+c}$ делится на p^{n+k+t}. Рассмотрев подобным образом остальные простые делители чисел a, b, c, получим требуемое утверждение.

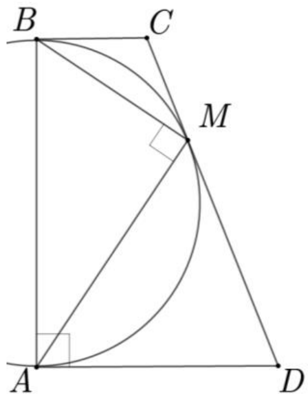
6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BCи AD угол DAB прямой. Известно, что на стороне CD существует единственная точка M такая, что угол BMA прямой. Докажите, что $BC = CM$ и $AD = MD$.

Решение. Построим на стороне AB как на диаметре окружность. Так как угол BMA прямой, то точка M лежит на этой окружности. Так как такая точка M единственная на стороне CD, то CD – касательная к окружности. Следовательно, $BC = CM$ и $AD = MD$.

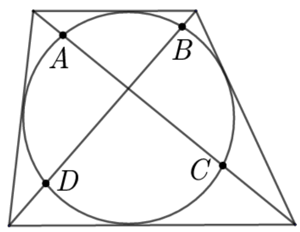


7. Известно, что существует натуральное число N такое, что $\left(\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}$. Найдите N.

Решение. Предположим, что, возведя число $a + b\sqrt{3}$ в степень N, мы получили число $A + B\sqrt{3}$ (здесь a, b, A, B – целые). Раскрыв скобки в выражении $\left(a+b\sqrt{3}\right)^N$, получим сумму одночленов (с для нас сейчас несущественными целыми коэффициентами) вида $a^{N-n}\left(b\sqrt{3}\right)^n$. Вклад в коэффициент B дадут те одночлены, у которых показатель n нечетен. Поэтому, если $\left(a+b\sqrt{3}\right)^N = A + B\sqrt{3}$, то $\left(a-b\sqrt{3}\right)^N = A - B\sqrt{3}$. Перемножив равенства $\left(\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 - 2781184 \cdot \sqrt{3}$ и $\left(-\sqrt{3}-1\right)^N = 4817152 + 2781184 \cdot \sqrt{3}$, получим $(-2)^N = 4817152^2 - 3 \cdot 2781184^2$. Показатель N найдем, деля обе части последовательно на 2 (можно, например сразу поделить каждое слагаемое справа на 256).



Ответ: $N = 16$.



8. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D. Докажите, что сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Известно, что величина угла AOD равна полусумме угловых мер дуг $\breve{CB}$ и $\breve{AD}$. В задаче по сути требуется доказать, что сумма длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$ меньше длины половины окружности, то есть их суммарная угловая мера меньше 180^0, что эквивалентно тому, что угол AOD острый. Для обоснования последнего построим (как на диаметрах) окружности на боковых сторонах трапеции (рис.). Углы AOD и BOC, под которыми из точки O видны боковые стороны, равны между собой. Значит, возможен один из трех случаев: 1) точка O находится внутри каждой из окружностей, если углы AOD и BOC тупые, 2) точка O лежит на каждой из окружностей, если углы прямые, 3) точка O лежит вне окружностей, если углы острые. Но, поскольку наша трапеция описанная, сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, а значит сумма радиусов этих окружностей равна полусумме оснований, то есть средней линии. Потому окружности имеют *единственную общую точку*, лежащую как раз на средней линии и потому отличную от O (так как длины оснований трапеции различны). Таким образом, реализуется третий случай: углы AOD и BOC острые, и, следовательно, сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$. Утверждение доказано.

10 КЛАСС

Вариант 1

1. Сравните числа

$(10^{2017}+10^{2016}+\dots+10+1)^{2018}$ и $(10^{2018}+10^{2017}+\dots+10+1)^{2017}$.

Решение. Обозначим

$$A=(10^{2017}+10^{2016}+\dots+10+1)^{2018},\qquad B=(10^{2018}+10^{2017}+\dots+10+1)^{2017}.$$

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, находим:

$$A=\frac{(10^{2018}-1)^{2018}}{9^{2018}},\qquad B=\frac{(10^{2019}-1)^{2017}}{9^{2017}}.$$

Обозначим $a=10^{2018}$. Оценим разность:

$$A-B=9^{-2018}\cdot((a-1)^{2018}-9\cdot(10a-1)^{2017})=9^{-2018}\cdot C.$$

Здесь $C=(a-1)^{2018}-9\cdot(10a-1)^{2017}$. Определим знак C. Увеличим вычитаемое, заменив $10a-1$ на $10a$:

$$C>(a-1)^{2018}-9\cdot(10a)^{2017}=(a-1)^{2018}-0{,}9\cdot a^{2018}.$$

Знак последнего выражения, очевидно, совпадает со знаком разности $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}-0{,}9$. Заметим, что $\frac{a-1}{a}>\frac{a-2}{a-1}>\frac{a-3}{a-2}>\dots>\frac{a-2018}{a-2017}$. Следовательно,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}>\frac{a-1}{a}\cdot\frac{a-2}{a-1}\cdot\frac{a-3}{a-2}\cdot\ldots\cdot\frac{a-2018}{a-2017}=\frac{a-2018}{a}.$$

Далее, $\frac{a-2018}{a}>0{,}9$, так как $0{,}1\cdot a>2018$. Следовательно, разность $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018}-0{,}9$, а вместе с ней и C положительны. Следовательно, первое число больше второго.

Ответ: Первое число больше второго.

2. Найдите все кратные трем натуральные числа n, у которых число делителей (включая 1 и само n) равно $\frac{n}{3}$. (Например, число 12 имеет 6 делителей: 1,2,3,4,6,12.)

Ответ: $\{18{,}24\}$

3. Сколькими способами из первых n натуральных чисел $1,2,\dots,n$ можно выбрать 4 числа, образующих возрастающую арифметическую прогрессию?

Решение. Количество прогрессий с разностью 1 равно $n-3$ (первый член прогрессии может принимать значения от 1 до $n-3$ включительно), количество прогрессий с разностью 2 равно $n-6$, … , количество прогрессий с разностью d равно $n-3d$. Разность d удовлетворяет неравенству $1+3d\le n$(если первый член прогрессии равен 1, то ее четвертый член, $1+3d$, не превосходит n). Поэтому наибольшее значение разности равно $d_{max}=\left[\frac{n-1}{3}\right]$ (квадратные скобки обозначают целую часть числа). Следовательно, количество прогрессий, удовлетворяющих условию задачи, равно:

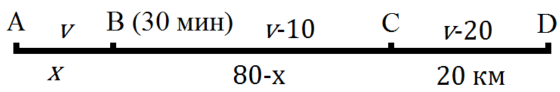
$$(n-3)+(n-6)+\dots+(n-3k)=\frac{(2n-3k-3)k}{2},\text{где } k=d_{max}.$$

Ответ: $\frac{(2n-3k-3)k}{2}$, где $k=\left[\frac{n-1}{3}\right]$.

4. Из пункта A в пункт B, расстояние между которыми равно 100 км, выехал автомобилист. В момент, когда навигатор показывал, что ехать осталось 30 мин, автомобилист первый раз снизил скорость на 10 км/ч, а в момент, когда навигатор показывал, что ехать осталось 20 км, автомобилист второй раз снизил скорость на те же 10 км/ч. (Навигатор определяет оставшееся время и расстояние на основании текущей скорости движения.) Определите первоначальную скорость автомобиля, если известно, что автомобиль с пониженной скоростью двигался на 5 мин дольше, чем с дважды пониженной скоростью.

ЗАМЕЧАНИЕ. В 9 классе эта же задача давалась в чуть иной редакции.

Решение. По условию, расстояние от C до D равно 20 км. Обозначим расстояние от A до B через



x (км), тогда расстояние от B до C составит $(80-x)$ км. Пусть $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ – первоначальная скорость автомобиля. Тогда на участках BC и CD она равна $(v-10)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$ и $(v-20)\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, соответственно. По условию, путь от B до D занял бы полчаса, если бы автомобиль продолжал двигаться со скоростью $v\frac{\text{км}}{\text{ч}}$, то есть

$$100-x=\frac{v}{2}. \qquad (1)$$

Далее, на путь из B в C он потратил на 5 мин больше времени, чем на путь из C в D:

$$\frac{80-x}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12}. \qquad (2)$$

Выразив x из первого уравнения и подставив во второе, получим уравнение для определения v:

$$\frac{\frac{v}{2}-20}{v-10}-\frac{20}{v-20}=\frac{1}{12},$$

которое имеет корни 14 и 100. Корень 14, очевидно, посторонний, так как $v>20$.

Ответ: $100\frac{\text{км}}{\text{ч}}$.

5. Решите уравнение $\sin\frac{\pi n}{12}\cdot\sin\frac{\pi k}{12}\cdot\sin\frac{\pi m}{12}=\frac{1}{8}$. Здесь k,m,n – натуральные числа, не превосходящие 5.

Решение.

Пусть $1\le n\le k\le m\le 5$.

Рассмотрим случаи:

1) $n=k=m=2$. Очевидно, этот набор – решение.

2) $n=1$. Тогда заметим, что при $k=2,\ m=5$ получим верное равенство.

Функция $y=\sin x$ на промежутке $(0;\frac{\pi}{2})$ возрастает, поэтому наборы $(2;k;m)$ при $k\ge 3$ и $(1;2;3),(1;2;4);(1;3;5),(1;4;5)$ не являются решениями.

Остается убедиться, что $(1;3;4)$ не является решением.

Ответ: $(2;2;2),(1;2;5),(1;5;2),(2;1;5),(2;5;1),(5;1;2),(5;2;1)$.

6. В трапеции $ABCD$ с основаниями BC и AD угол DAB прямой. Известно, что на стороне CD существует единственная точка M такая, что угол BMA прямой. Докажите, что $BC = CM$ и $AD = MD$.

Решение. Построим на стороне AB как на диаметре окружность. Так как угол BMA прямой, то точка M лежит на этой окружности. Так как такая точка M единственная на стороне CD, то CD – касательная к окружности. Следовательно, $BC = CM$ и $AD = MD$.

7. Произведение положительных чисел a и b больше 1. Докажите, что для любого натурального $n \geq 2$ верно неравенство

$$(a+b)^n > a^n + b^n + 2^n - 2.$$

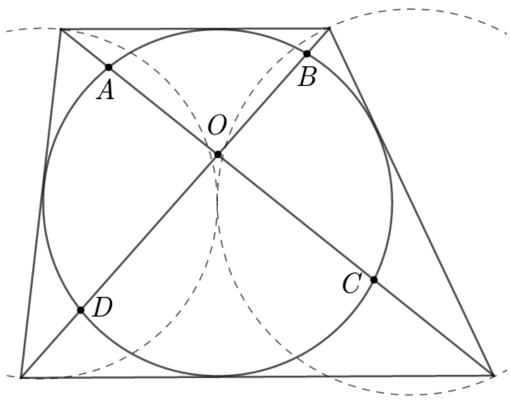
Решение. $(a+b)^n = a^n + t_{n-1}a^{n-1}b + t_{n-2}a^{n-2}b^2 + \cdots t_1 ab^{n-1} + b^n$, где t_k – целые числа, зависящие от n и k, но не зависящие от a и b, и при этом

$t_{n-1} = t_1, t_{n-2} = t_2, \cdots, t_{n-k} = t_k, \cdots$ (*)

При $a = b = 1$ имеем: $2^n = 1 + t_{n-1} + t_{n-2} + \cdots t_1 + 1.$ (**)

$$(a+b)^n = a^n + b^n + t_{n-1}(a^{n-1}b + ab^{n-1}) + t_{n-2}(a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2}) + \cdots$$
$$+ t_{n-k}(a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k}) + \cdots.$$

Воспользуемся неравенством Коши о среднем арифметическом и среднем геометрическом: для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство $\frac{x+y}{2} \geq \sqrt{xy}$.



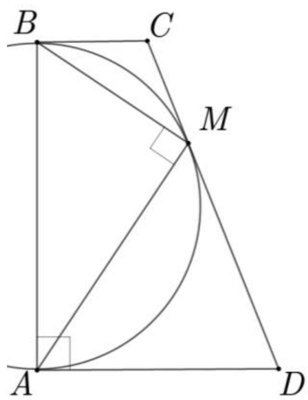
Тогда $a^{n-1}b + ab^{n-1} \geq 2\sqrt{a^nb^n} > 2$,

$a^{n-2}b^2 + a^2b^{n-2} \geq 2\sqrt{a^nb^n} > 2, \cdots, a^{n-k}b^k + a^kb^{n-k} \geq 2\sqrt{a^nb^n} > 2, \cdots.$

Учитывая эти неравенства, симметрию коэффициентов (*) и равенство (**), получим требуемое.

8. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D. Докажите, что сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Известно, что величина угла AOD равна полусумме угловых мер дуг $\breve{CB}$ и $\breve{AD}$. В задаче по сути требуется доказать, что сумма длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$ меньше длины половины окружности, то есть их суммарная угловая мера меньше 180^0, что эквивалентно тому, что угол AOD острый. Для обоснования последнего построим (как на диаметрах) окружности на боковых сторонах трапеции (рис.). Углы AOD и BOC, под которыми из точки O видны боковые стороны, равны между собой. Значит, возможен один из трех случаев: 1) точка O находится внутри каждой из окружностей, если углы AOD и BOC тупые, 2) точка O лежит на каждой из окружностей, если углы прямые, 3) точка O лежит вне окружностей, если углы острые. Но, поскольку наша трапеция описанная, сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, а значит сумма радиусов этих окружностей равна полусумме оснований, то есть средней линии. Потому окружности имеют *единственную общую*



точку, лежащую как раз на средней линии и потому отличную от O (так как длины оснований трапеции различны). Таким образом, реализуется третий случай: углы AOD и BOC острые, и, следовательно, сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$. Утверждение доказано.

11 КЛАСС

Вариант 1

1. Решите уравнение $x^2 - 2x \cdot \sin(x \cdot y) + 1 = 0$.

Решение. Левую часть уравнения будем интерпретировать как квадратный трехчлен относительно x. Чтобы корни существовали, дискриминант должен быть неотрицательным, т.е. $D = 4sin^2(x \cdot y) - 4 \geq 0 \Leftrightarrow sin^2(x \cdot y) = 1 \Leftrightarrow \cos 2xy = -1 \Leftrightarrow xy = \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$. Для четных n получаем уравнение $x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$, а для нечетных n находим $x = -1$. Левая часть уравнения – четная функция x, поэтому для $x = 1$ и для $x = -1$ соответствующие значения y будут одними и теми же.

Ответ: $\left(\pm 1, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Натуральные числа от 1 до 100 записали подряд без пробелов. Затем, между некоторыми цифрами поместили знак плюс. (Например, $1234567 + 891011 \ldots 15 + 1617 \ldots 99100$.) Может ли получившаяся в результате сумма делиться на 111?

Решение. Остаток от деления числа на три равен остатку от деления на три суммы его цифр. Значит, сумма остатков от деления на три всех чисел, разделенных знаками плюс, равна остатку от деления на 3 суммы всех цифр у чисел от 1 до 100. В свою очередь, эта сумма цифр дает при делении на 3 тот же остаток, что и сумма $1 + \cdots + 100 = 5050$. Так как 5050 на три не делится, то на 3 не делится и сумма из условия задачи. Если число не делится на 3, то оно не делится и на 111.

Ответ: нет

3. Сравните числа $(10^{2017} + 10^{2016} + \cdots + 10 + 1)^{2018}$ и $(10^{2018} + 10^{2017} + \cdots + 10 + 1)^{2017}$.

Решение. Обозначим

$$A = (10^{2017} + 10^{2016} + \cdots + 10 + 1)^{2018}, \qquad B = (10^{2018} + 10^{2017} + \cdots + 10 + 1)^{2017}.$$

Пользуясь формулой для суммы членов геометрической прогрессии, находим:

$$A = \frac{(10^{2018} - 1)^{2018}}{9^{2018}}, \qquad B = \frac{(10^{2019} - 1)^{2017}}{9^{2017}}.$$

Обозначим $a = 10^{2018}$. Оценим разность:

$$A - B = 9^{-2018} \cdot ((a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a - 1)^{2017}) = 9^{-2018} \cdot C.$$

Здесь $C = (a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a - 1)^{2017}$. Определим знак C. Увеличим вычитаемое, заменив $10a - 1$ на $10a$:

$$C > (a-1)^{2018} - 9 \cdot (10a)^{2017} = (a-1)^{2018} - 0{,}9 \cdot a^{2018}.$$

Знак последнего выражения, очевидно, совпадает со знаком разности $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0{,}9$. Заметим, что $\frac{a-1}{a} > \frac{a-2}{a-1} > \frac{a-3}{a-2} > \cdots > \frac{a-2018}{a-2017}$. Следовательно,

$$\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} > \frac{a-1}{a} \cdot \frac{a-2}{a-1} \cdot \frac{a-3}{a-2} \cdot \ldots \cdot \frac{a-2018}{a-2017} = \frac{a-2018}{a}.$$

Далее, $\frac{a-2018}{a} > 0{,}9$, так как $0{,}1 \cdot a > 2018$. Следовательно, разность $\left(\frac{a-1}{a}\right)^{2018} - 0{,}9$, а вместе с ней и C положительны. Следовательно, первое число больше второго.

Ответ: Первое число больше второго.

4. Основанием треугольной пирамиды $SABC$ служит правильный треугольник ABC со стороной 4. Известно, что для произвольной точки M на продолжении высоты пирамиды SH (точка S находится между точками M и H) углы MSA, MSB, MSC, ASB, ASC и BSC равны между собой. Построен шар радиуса 1 с центром в точке S. Найдите объём общей части пирамиды $SABC$ и шара (объём шара радиуса R вычисляется по формуле $V = \frac{4}{3}\pi R^3$.)

Решение. Выберем точку M (из условия задачи) так, что $MA = 4$. Тогда точка S будет являться центром описанного шара около правильного тетраэдра $MABC$. Следовательно, каждая из четырёх одинаковых пирамид $SABC, SMAB, SMAC, SABC$ будет отсекать от шара радиуса 1 с центром в точке S одинаковую часть. Нетрудно подсчитать, что расстояние от точки S до плоскости ABC равно $\frac{\sqrt{6}}{3}$. Так как $\frac{\sqrt{6}}{3} < 1$, то для нахождения объёма общей части пирамиды $SABC$ и шара радиуса $R = 1$ с центром в точке S нужно из четверти объёма шара $\frac{1}{3}\pi R^3$ вычесть объём шарового сегмента высотой $h = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$. Как известно, последний находится по формуле $V_c = \pi h^2 \left(R - \frac{h}{3}\right)$. Для $R = 1,\ h = 1 - \frac{\sqrt{6}}{3}$ получаем $V_c = \pi \cdot \frac{18-7\sqrt{6}}{27}$. Отсюда искомый объём равен $\pi \cdot \frac{7\sqrt{6}-9}{27}$.

Ответ: $\pi \cdot \frac{7\sqrt{6}-9}{27}$.

5. Докажите, что для любого натурального числа n существует натуральное число N такое, что произведение $9 \cdot 5^n \cdot N$ представляет собой *палиндром*, то есть число, десятичная запись которого справа налево и слева направо читается одинаково. Например, для $n = 1$ можно взять $N = 13$, так как $9 \cdot 5^1 \cdot 13 = 585$.

Решение. Будем использовать следующий факт. Пусть натуральное число B делится на 5^n, а его десятичная запись содержит не менее n цифр, то есть $B = b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1b_0$ и $m \geq n$. Тогда, приписав к десятичной записи числа B произвольные цифры слева, вновь получим делящееся на 5^n число, а именно: число $A = a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1b_0$ также делится на 5^n, так как $A = 10^m \cdot a_{k-1}a_{k-2}\cdots a_0 + B$.

Пусть десятичная запись числа 5^n имеет вид $a_{k-1}\cdots a_1a_0$. Очевидно, что $n \geq k$. Существует нечётное число C такое, что десятичная запись произведения $C \cdot 5^n = b_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1b_0$ содержит более n цифр. Например, $C = 2^n + 1$, тогда $C \cdot 5^n > 10^n$, а запись числа 10^n содержит $n + 1$ цифру. (Из нечетности C следует неравенство $b_0 \neq 0$, что далее существенно.)

Рассмотрим число-палиндром $V = b_0b_1\cdots b_{m-2}b_{m-1}xb_{m-1}b_{m-2}\cdots b_1b_0$, в котором цифру x выберем так, чтобы сумма всех цифр числа V делилась на 9 (тогда и само V делится на 9). Согласно рассуждениям выше, число V делится на 5^n, а значит, для $N = \frac{V}{9\cdot 5^n}$ справедливо равенство $V = 9 \cdot 5^n \cdot N$. Таким образом, существование натурального N доказано

6. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} \sqrt{(x-6)^2+(y-13)^2}+\sqrt{(x-18)^2+(y-4)^2}=15 \\ (x-2a)^2+(y-4a)^2=\dfrac{1}{4} \end{cases}$$

имеет единственное решение?

Решение.

Первое уравнение системы задает ГМТ точек $M(x,y)$ на плоскости сумма расстоянийот которых до точек $A(6,13)$ и $B(18,4)$ равна 15. Заметим, что

$$|AB|=\sqrt{12^2+9^2}=15.$$

Поэтому согласно неравенству треугольника, ГМТ таких точек $M(x,y)$ суть точки отрезка AB.

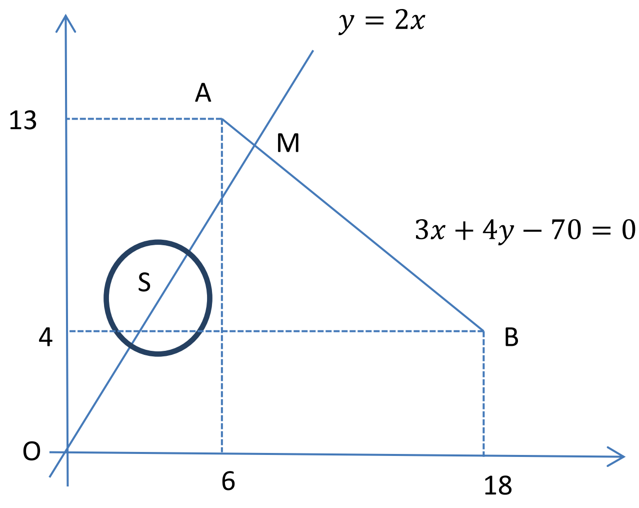
Второе уравнение есть уравнение окружности с центром в точке $S(2a,4a)$ радиуса $\frac{1}{2}$.

Единственность решения системы возможна в том и только в том случае, когда окружность пересекает отрезок AB ровно в одной точке.

Очевидно, что гарантированно единственная точка пересечения будет в случае касания окружности отрезком. Это произойдет тогда, когда расстояние от точки $S(2a,4a)$ до прямой, содержащей отрезок AB, будет равно радиусу окружности, и точка касания будет попадать в отрезок AB. Уравнение прямой, содержащей AB, как нетрудно установить, имеет вид $3x+4y-70=0$. Согласно формуле расстояния от точки до прямой (один из вариантов решения):

$$\frac{|3\cdot 2a+4\cdot 4a-70|}{\sqrt{3^2+4^2}}=\frac{1}{2}.$$

Отсюда получим два возможных значения параметра a:



$$\left[\begin{aligned} a&=\frac{145}{44}, \\ a&=\frac{135}{44}. \end{aligned}\right.$$

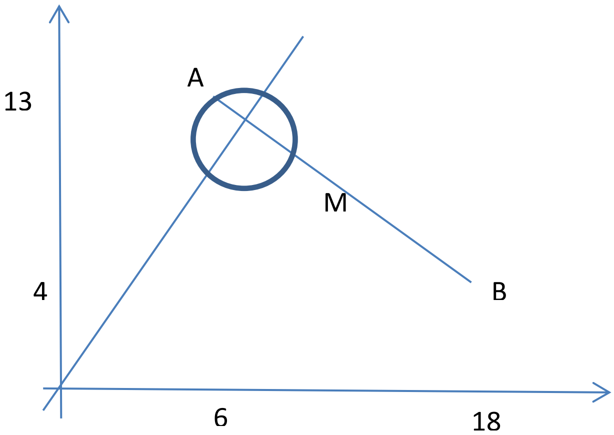
Центр окружности лежит на прямой $y=2x$.Точка $M\left(\frac{70}{11},\frac{140}{11}\right)$ пересечения прямых $y=2x$ и $3x+4y-70=0$ лежит на отрезке AB. Угол OMBострый, поэтому точка касания прямой $3x+4y-70=0$ и окружности, центр которой лежит под отрезком AB, заведомо на отрезок AB попадет. Это происходит при $a=\frac{135}{44}$. Если же цент S окружности лежит выше отрезка AB (это происходит при $a = \frac{145}{44}$), то требуются дополнительные рассуждения. Точка касания H есть проекция точки $S\left(\frac{145}{22}, \frac{145}{11}\right)$на прямую, содержащую отрезок AB. H попадет в отрезок AM, если $MH \leq AM$. Имеем:

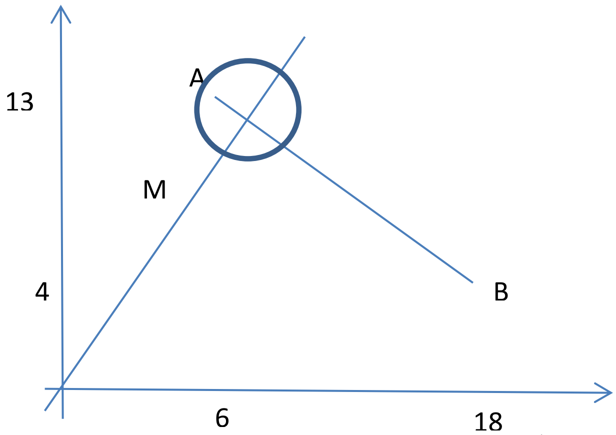
$$MH = \sqrt{SM^2 - SH^2} = \sqrt{\left(\frac{145}{22} - \frac{70}{11}\right)^2 + \left(\frac{145}{11} - \frac{140}{11}\right)^2 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{11},$$

$$AM = \sqrt{\left(\frac{70}{11} - 6\right)^2 + \left(\frac{140}{11} - 13\right)^2} = \frac{5}{11}.$$

Следовательно $MH < AM$, и точка касания H лежит на отрезке AB.

В то же время, поскольку $AM < \frac{1}{2}$, постольку единственность решения возможна, когда окружность пересекает отрезок AB, но при этом точка A попадает во внутрь круга. Так будет происходить с момента пересечения окружности и отрезка в точке A до момента повторного пересечения в той же точке A (не включая данные моменты).





Найдем такие положения точки $S(2a, 4a)$, при которых расстояние от нее до точки A равно $\frac{1}{2}$. Имеем:

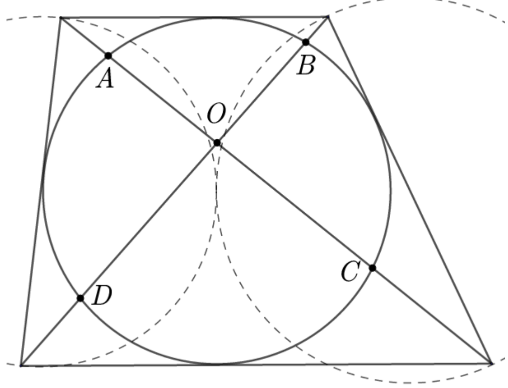
$$(2a - 6)^2 + (4a - 13)^2 = \frac{1}{4}.$$

Отсюда

$$\left[\begin{array}{l} a = \frac{13}{4}, \\ a = \frac{63}{20}. \end{array}\right.$$

Значит, при $a \in \left(\frac{63}{20}, \frac{13}{4}\right)$точка пересечения будет единственна, как и решение системы уравнений. Окончательно получим

Ответ: $a = \frac{145}{44}, a = \frac{135}{44}, a \in \left(\frac{63}{20}, \frac{13}{4}\right)$.



7. Вписанная в трапецию окружность пересекает ее диагонали в точках A, B, C, D. Докажите, что сумма длин дуг $\overset{\frown}{BA} + \overset{\frown}{DC}$ больше суммы длин дуг $\overset{\frown}{AD} + \overset{\frown}{CB}$.

Решение. Пусть O – точка пересечения диагоналей. Известно, что величина угла AOD равна полусумме угловых мер дуг $\overset{\frown}{CB}$ и $\overset{\frown}{AD}$. В задаче по сути требуется доказать, что сумма длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$ меньше длины половины окружности, то есть их суммарная угловая мера меньше 180^0, что эквивалентно тому, что угол AOD острый. Для обоснования последнего построим (как на диаметрах) окружности на боковых сторонах трапеции (рис.). Углы AOD и BOC, под которыми из точки O видны боковые стороны, равны между собой. Значит, возможен один из трех случаев: 1) точка O находится внутри каждой из окружностей, если углы AOD и BOC тупые, 2) точка O лежит на каждой из окружностей, если углы прямые, 3) точка O лежит вне окружностей, если углы острые. Но, поскольку наша трапеция описанная, сумма длин боковых сторон равна сумме длин оснований, а значит сумма радиусов этих окружностей равна полусумме оснований, то есть средней линии. Потому окружности имеют *единственную общую точку*, лежащую как раз на средней линии и потому отличную от O (так как длины оснований трапеции различны). Таким образом, реализуется третий случай: углы AOD и BOC острые, и, следовательно, сумма длин дуг $\breve{BA} + \breve{DC}$ больше суммы длин дуг $\breve{AD} + \breve{CB}$. Утверждение доказано.

8. Известно, что для любого натурального числа n верна формула:

$$\cos(n\alpha) = 2^{n-1} \cdot (cos\alpha)^n + a_{n-1} \cdot (cos\alpha)^{n-1} + a_{n-2} \cdot (cos\alpha)^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot (cos\alpha) + a_0.$$

Здесь a_k – целые числа, и $a_0 = 0$ при нечётном n. Докажите, что при $n \geq 4$ числа $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ и $\sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ иррациональны.

Решение. При доказательстве будем пользоваться следующим утверждением: если рациональное число $t = \frac{p}{q}$ (p и q – взаимно простые целые числа) является корнем многочлена $f(x) = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + \cdots a_1 x + a_0$ с целыми коэффициентами ($a_i \in \mathbb{Z}$), то p является делителем a_0, а q – делителем a_k. Предположим, что $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – рациональное число (при некотором $n \geq 4$).

1) Пусть n кратно 4, то есть $n = 4t, t \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\frac{\sqrt{2}}{2} = \cos\frac{\pi}{4} = \cos\left(t\frac{\pi}{n}\right) = \cos\left(t\frac{\pi}{4t}\right) =$$

$$= 2^{t-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^t + a_{t-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-1} + a_{t-2} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-2} + \cdots + a_1 \cdot \left(cos\frac{\pi}{n}\right) + a_0.$$

Такое равенство невозможно, так как левая часть – иррациональное число $\frac{\sqrt{2}}{2}$, тогда как значение правой части рационально.

2) Пусть n – нечётное число и $n \geq 5$. Тогда

$$-1 = \cos\pi = \cos\left(n\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{n-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^n + a_{n-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{n-1} + a_{n-2} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot \left(cos\frac{\pi}{n}\right).$$

Тогда $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – рациональный корень многочлена $2^{n-1} \cdot x^n + a_{n-1} \cdot x^{n-1} + a_{n-2} \cdot x^{n-2} + \cdots + a_1 \cdot x + 1$, и, по сформулированному выше утверждению, $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) = \frac{1}{2^m}$, где $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Но то невозможно, так как при $n \geq 5$ выполняется неравенство $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right) > \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2^m}$. Вновь получено противоречие.

3) Пусть, наконец, n чётно и не кратно 4. Тогда n имеет нечётный делитель p, то есть $n = pt$, p – нечетное число; более того, если $n \notin \{2{,}6\}$, то всегда можно выбрать p так, что $p \geq 5$. Тогда

$$\cos\frac{\pi}{p} = \cos\left(t\frac{\pi}{n}\right) =$$

$$= 2^{t-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^t + a_{tn-1} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-1} + a_{t-2} \cdot (cos\frac{\pi}{n})^{t-2} + \cdots + a_1 \cdot \left(cos\frac{\pi}{n}\right) + a_0.$$

В предыдущем пункте доказано, что число $\cos\frac{\pi}{p}$ иррационально. Значит число $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ также иррационально, ибо в противном случае рациональной была бы и правая часть последнего равенства.

Таким образом, для всех натуральных $n \geq 4$ показано, что $\cos\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – иррациональное число.

Покажем, что для всех натуральных $n \geq 4,\ n \neq 6$ число $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ иррационально. Предположим, что при некотором n $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$ – рациональное число.

1) Пусть n – чётное число, $n = 2k, k \geq 4$. Тогда $\cos\frac{\pi}{k} = \cos 2\frac{\pi}{n} = 1 - 2sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$. По доказанному, число $\cos\left(\frac{\pi}{k}\right)$ иррационально, следовательно иррационально и число $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

2) Пусть n нечётно. Аналогично первой части рассуждений доказывается иррациональность числа $\cos\left(\frac{2\pi}{n}\right),\ n \geq 8$. Далее из равенства $\cos\frac{2\pi}{n} = 1 - 2sin^2\left(\frac{\pi}{n}\right)$ следует иррациональность числа $sin\left(\frac{\pi}{n}\right)$.

ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП

11 КЛАСС

Вариант 1

1. Известно, что уравнение $x^4-8x^3+ax^2+bx+16=0$ имеет (с учетом кратности) четыре положительных корня. Найдите *a* - *b*.

Решение: Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 – корни нашего уравнения (возможно, среди них есть одинаковые). Следовательно, многочлен в левой части уравнения раскладывается на множители:

$$x^4-8x^3+ax^2+bx+16=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4).$$

Раскрывая в правой части скобки и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях *x*, получим:

$$x_1+x_2+x_3+x_4=8, \quad x_1x_2x_3x_4=16.$$

Известно, что среднее геометрическое неотрицательных чисел не превосходит их среднего арифметического, но в нашем случае они равны:

$$\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4}=\sqrt[4]{x_1x_2x_3x_4}=2.$$

Следовательно, $x_1=x_2=x_3=x_4=2$, и

$$x^4-8x^3+ax^2+bx+16=(x-2)^4.$$

Отсюда $a=24, b=-32$.

Ответ: 56

2. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – A, B и C. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида A содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках B – 20% раствор и в C – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Известно, что в ёмкости получили 20,17% раствор, выполнив при этом наименьшее количество переливаний. Какое наибольшее количество пробирок вида C может быть при этом использовано?

Решение: Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a*,*b* и *c* штук. По условию $0{,}1a+0{,}2b+0{,}9c=0{,}2017\cdot(a+b+c)\Leftrightarrow 1000\cdot(a+2b+9c)=2017\cdot(a+b+c)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a*,*b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500, b\le 500, c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17, b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517, 8c\ge 518, c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответсвующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: **73**

3. Найдите сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2+2^2+4^2=21$).

Решение: Пусть $\sigma(N)$ – сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b. И наоборот: умножив делитель a на делитель b, поучим делитель произведения ab. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

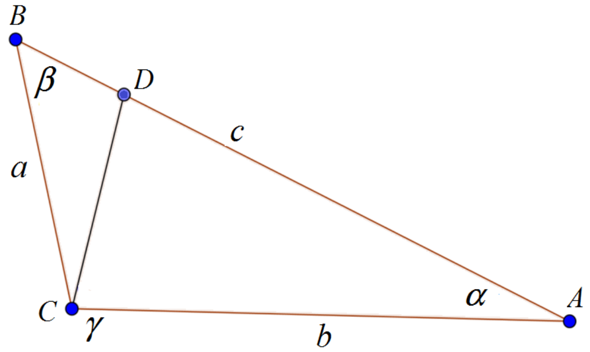
Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_n^{k_n}$. Здесь p_i – попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot\ldots\cdot\sigma\left(p_n^{k_n}\right)$ и

$\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+\ldots p^{2k}$. Поскольку $1800=2^3\cdot3^2\cdot5^2$, то

$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$

Ответ: 5035485.

4. В треугольнике со сторонами a,b,c и углами α,β,γ выполнено равенство $3\alpha+2\beta=180^0$. Стороны a,b,c лежат соответственно напротив углов α,β,γ. Найти длину стороны c при $a=2,b=3$



Решение: Из условия следует, что $c>b$. Найдем на отрезке AB точку D такую, что $AC=AD$. Тогда треугольник ACD равнобедренный и $\angle ACD=\angle ADC=90°-\alpha/2$. Угол ADC – внешний угол треугольника CBD. Значит, $\angle BCD+\beta=\angle ADC=90°-\frac{\alpha}{2}=\alpha+\beta$. Значит $\angle BCD=\alpha$, и треугольники CD и ABC подобны. Имеем $\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$ или $\frac{c-b}{a}=\frac{a}{c}$, откуда следует $a^2+bc-c^2=0$. Квадратное уравнение $c^2-3c-4=0$ имеет единственный положительный корень $c=4$.

Ответ: 4.

5. Известно, что многочлен $f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1,x_2,x_3,x_4\}$. Многочлен вида $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+x^4$ имеет корни $\{x_1^2,x_2^2,x_3^2,x_4^2\}$. Найти коэффициент b_1 многочлена $g(x)$.

Решение: Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3: $f(x)$=$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4$.
Тогда по условию задачи имеем:
$f(x)$= $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + x^4 = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$.
Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1, -x_2, -x_3, -x_4\}$:

$$h(x) = (x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) = a_0 - a_1x + a_2x^2 - a_3x^3 + x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(x) = f(x)h(x)$:

$$G(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)(x + x_1)(x + x_2)(x + x_3)(x + x_4) =$$
$$= (x^2 - {x_1}^2)(x^2 - {x_2}^2)(x^2 - {x_3}^2)(x^2 - {x_4}^2).$$

Заменой переменной $y = x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = (y - {x_1}^2)(y - {x_2}^2)(y - {x_3}^2)(y - {x_4}^2).$$

В нашем случае:

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4,$$
$$h(x) = 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$g(x) = f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8,$$
$$g(y) = 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4.$$

Ответ: -1216

6. Найти число матриц, удовлетворяющих двум условиям:

1) матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$, где каждая * может принимать значение 0 или 1

2) строки матрицы не повторяются.

Решение: Обозначим через A множество матриц, удовлетворяющих условию 1) и через B - подмножество множества A, состоящее из матриц, удовлетворяющих условию 2). Требуется найти число элементов множества B. Пусть $A_{ij}, i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j,$ – подмножество множества A, состоящее из матриц, в которых совпадают строка i и j. Тогда $B = A \setminus (A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13})$ и $|B| = |A| - |A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$.Мощность $|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$ удобно вычисляется по формуле включения-исключения:

$|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}| = |A_{12}| + |A_{23}| + |A_{13}| - |A_{12} \cap A_{23}| - |A_{13} \cap A_{23}| - |A_{12} \cap A_{13}| + |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}|$.

Легко вычислить мощности множеств, фигурирующих в этом выражении:

$|A_{12}| = |A_{23}| = |A_{13}| = 2^3$, $|A_{12} \cap A_{23}| = |A_{13} \cap A_{23}| = |A_{12} \cap A_{13}| = |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}| = 1$.

Получим $|B| = 2^6 - 3 \cdot 2^3 + 3 - 1 = 42$.

Ответ: 42

10 КЛАСС
Вариант 1

1. Найдите все корни уравнения $\dfrac{1}{\cos^3 x} - \dfrac{1}{\sin^3 x} = 4\sqrt{2},$ лежащие на интервале $\left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$. Ответ записать в градусах.

Решение:

$$\sin^3 x - \cos^3 x = 4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x \Leftrightarrow (\sin x - \cos x)\left(\sin^2 x + \sin x\cos x + \cos^2 x\right) = 4\sqrt{2}\sin^3 x\cos^3 x.$$

Замена: $\sin x - \cos x = t, \sin x \cos x = \dfrac{1-t^2}{2}$. Тогда $t\left(3-t^2\right) = \sqrt{2}\left(1-t^2\right)^3$. Замена: $t = z\sqrt{2}$. Уравнение примет вид $z\left(3-2z^2\right) - \left(1-2z^2\right)^3 = 0$. Имеется корень $z=-1$, и левая часть может быть разложена на множители следующим образом:

$$(z+1)(8z^5 - 8z^4 - 4z^3 + 2z^2 + 4z - 1) = 0. \qquad (1)$$

Так как $x \in \left(-\dfrac{\pi}{2}, 0\right)$, то $t = \sin x - \cos x = \sqrt{2}\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) < -1$. Следовательно, $z < -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$. При таких z многочлен пятой степени в левой части (1) принимает только отрицательные значения, так как $\left|8z^5\right| > \left|4z^3\right|$ и $\left|8z^4\right| > \left|2z^2\right|$. Поэтому $z=-1$ – единственный корень уравнения (1). Далее легко найти, что $\sin\left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) = -1$, и $x = -\dfrac{\pi}{4}$.

Ответ: -45

2. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – A, B и C. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида A содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках B – 20% раствор и в C – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Известно, что в ёмкости получили 20,17% раствор, выполнив при этом наименьшее количество переливаний. Какое наибольшее количество пробирок вида C может быть при этом использовано?

Решение: Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a*,*b* и *c* штук. По условию $0,1a + 0,2b + 0,9c = 0,2017\cdot\left(a+b+c\right) \Leftrightarrow 1000\cdot\left(a+2b+9c\right) = 2017\cdot\left(a+b+c\right)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа *a*,*b* и *c* такие, что

$$\begin{cases} a+b+c = 1000 \\ a+2b+9c = 2017 \\ a \le 500, b \le 500, c \le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.

Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a = 7c - 17, b = 1017 - 8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c \le 517, 8c \ge 518, c \le 500.$$

Отсюда наибольшее значение *c* равно 73. Ему соответсвующие значения *a* и *b* могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.

Ответ: **73**

3. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2 + 2^2 + 4^2 = 21$).

Решение: Пусть $\sigma(N)$ – сумма квадратов натуральных делителей натурального числа *N*. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел *a* и *b* справедливо равенство:

$\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b. И наоборот: умножив делитель a на делитель b, поучим делитель произведения ab. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

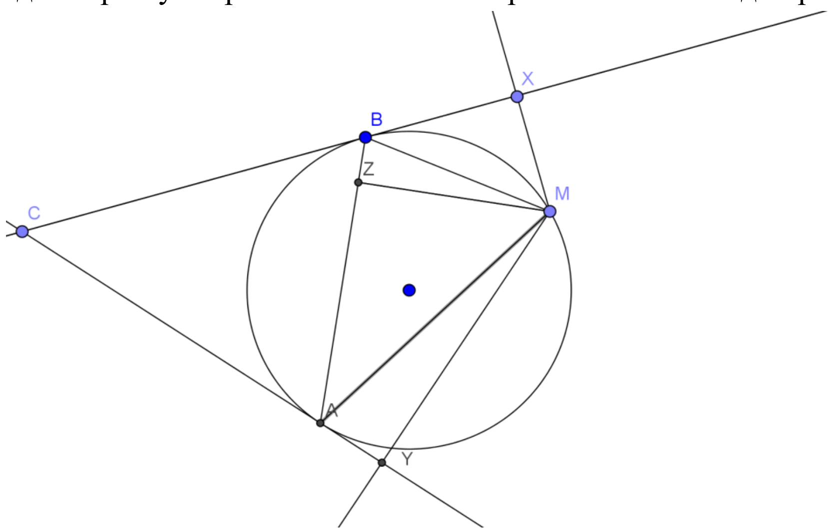
Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N = p_1^{k_1}\cdot K \cdot p_n^{k_n}$. Здесь p_i – попарно различны простые числа, и все $k_i \in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot K\cdot\sigma\left(p_n^{k_n}\right)$ и

$\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+K\ p^{2k}$. Поскольку $1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$

Ответ: 5035485.

4. Окружность касается сторон угла в точках A и B. На окружности выбрана точка M. Расстояния от M до сторон угла равны 24 и 6. Найти расстояние от M до прямой AB.



Решение: $\angle XBM = \angle ZAM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{BM}$, следовательно, треугольники BMX и ZAM подобны, поэтому $\frac{XM}{ZM}=\frac{BM}{AM}$. $\angle ABM = \angle YAM = \frac{1}{2}\overset{\smile}{AM}$, следовательно, треугольники AMYи BMZ подобны, поэтому $\frac{YM}{ZM}=\frac{AM}{BM}$. Отсюда

$$ZM^2 = XM\cdot YM = 24\cdot 6 = 144, \qquad ZM = 12.$$

Ответ: 12

5. Известно, что многочлен $f(x)=8+32x-12x^2-4x^3+x^4$ имеет 4 различных действительных корня $\{x_1, x_2, x_3, x_4\}$. Многочлен вида $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+b_3x^3+x^4$ имеет корни $\{x_1^2, x_2^2, x_3^2, x_4^2\}$. Найти коэффициент b_1 многочлена $g(x)$.

Решение: Обозначим коэффициенты заданного многочлена (кроме старшего) через a_0, a_1, a_2, a_3: $f(x)$=$a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4$.

Тогда по условию задачи имеем:

$f(\ \ )$= $a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+x^4=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)$.

Вместе с многочленом $f(x)$ рассмотрим многочлен $h(x)$, имеющий корни $\{-x_1,-x_2,-x_3,-x_4\}$:

$$h(x)=(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)= a_0-a_1x+a_2x^2-a_3x^3+x^4.$$

Рассмотрим многочлен $G(?)=f(x)h(x)$:

$$G(x)=(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)(x+x_1)(x+x_2)(x+x_3)(x+x_4)=$$
$$=(x^2-x_1{}^2)(x^2-x_2{}^2)(x^2-x_3{}^2)(x^2-x_4{}^2).$$

Заменой переменной $y=x^2$ получаем требуемый многочлен $g(y)$, поскольку

$$g(y) = (y - x_1^2)(y - x_2^2)(y - x_3^2)(y - x_4^2).$$

В нашем случае:

$$f(x) = 8 + 32x - 12x^2 - 4x^3 + x^4,$$
$$h(x) = 8 - 32x - 12x^2 + 4x^3 + x^4,$$
$$\mathcal{g}(x) = f(x)h(x) = 64 - 1216x^2 + 416x^4 - 40x^6 + x^8,$$
$$g(y) = 64 - 1216y + 416y^2 - 40y^3 + y^4.$$

Ответ: -1216

6. Найти число матриц, удовлетворяющих двум условиям:

3) матрица имеет вид $\begin{pmatrix} 1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1 \end{pmatrix}$, где каждая * может принимать значение 0 или 1

4) строки матрицы не повторяются.

Решение: Обозначим через A множество матриц, удовлетворяющих условию 1) и через B - подмножество множества A, состоящее из матриц, удовлетворяющих условию 2). Требуется найти число элементов множества B. Пусть $A_{ij}, i, j \in \{1,2,3\}, i \neq j,$ – подмножество множества A, состоящее из матриц, в которых совпадают строка i и j. Тогда $B = A \setminus (A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13})$ и $|B| = |A| - |A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$.Мощность $|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}|$ удобно вычисляется по формуле включения-исключения:

$|A_{12} \cup A_{23} \cup A_{13}| = |A_{12}| + |A_{23}| + |A_{13}| - |A_{12} \cap A_{23}| - |A_{13} \cap A_{23}| - |A_{12} \cap A_{13}| + |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}|$.

Легко вычислить мощности множеств, фигурирующих в этом выражении:

$|A_{12}| = |A_{23}| = |A_{13}| = 2^3$, $|A_{12} \cap A_{23}| = |A_{13} \cap A_{23}| = |A_{12} \cap A_{13}| = |A_{12} \cap A_{23} \cap A_{13}| = 1$.

Получим $|B| = 2^6 - 3 \cdot 2^3 + 3 - 1 = 42$.

9 КЛАСС
Вариант 1

7. Вычислите выражение $9999(0,(0001) + 0,(0002) + \ldots + 0,(2017))$.

Решение: Воспользовавшись правилом перевода периодической десятичной дроби в обыкновенную, а также формулой для суммы первых 2017 членов арифметической прогрессии, найдем

$$0,(0001) + 0,(0002) + \ldots + 0,(2017) = \frac{1}{9999} + \frac{2}{9999} + \ldots + \frac{2017}{9999} = \frac{1009 \cdot 2017}{9999} = \frac{2035153}{9999}.$$

Ответ: 2035153

8. Имеется неограниченное количество пробирок трёх видов – A, B и C. Каждая из пробирок содержит один грамм раствора одного и того же вещества. В пробирках вида A содержится 10% раствор этого вещества, в пробирках B – 20% раствор и в C – 90% раствор. Последовательно, одну за другой, содержимое пробирок переливают в некоторую ёмкость. При этом при двух последовательных переливаниях нельзя использовать пробирки одного вида. Известно, что в ёмкости получили 20,17% раствор, выполнив при этом наименьшее количество переливаний. Какое наибольшее количество пробирок вида C может быть при этом использовано?

Решение: Пусть пробирок вида A, B и C взяли соответственно *a*,*b* и *c* штук. По условию $0,1a + 0,2b + 0,9c = 0,2017 \cdot (a+b+c) \Leftrightarrow 1000 \cdot (a + 2b + 9c) = 2017 \cdot (a+b+c)$. Левая часть последнего равенства делится на 1000, следовательно на 1000 должна делиться и правая часть. Значит, наименьшее возможное значение суммы $a+b+c$ равно 1000. Покажем, что эта оценка достижима. То есть, докажем, что существуют неотрицательные целые числа a,b и c такие, что

$$\begin{cases} a+b+c=1000 \\ a+2b+9c=2017 \\ a\le 500,\, b\le 500,\, c\le 500. \end{cases} \qquad (1)$$

Последние три неравенства служат необходимым и достаточным условиям того, что удастся избежать использования пробирок одного вида при двух последовательных переливаниях.
Из первых двух уравнений системы (1) находим

$$a=7c-17,\, b=1017-8c. \qquad (2)$$

Подставив эти выражения в последние три неравенства системы (1), получим

$$7c\le 517,\, 8c\ge 518,\, c\le 500.$$

Отсюда наибольшее значение c равно 73. Ему соответсвующие значения a и b могут быть найдены из (2). Они, очевидно, удовлетворяют неравенствам системы (1). Таким образом, разрешимость в неотрицательных целых числах системы (1) доказана.
Ответ: **73**

9. Найти сумму квадратов натуральных делителей числа 1800. (Например, сумма квадратов натуральных делителей числа 4 равна $1^2+2^2+4^2=21$).

Решение: Пусть $\sigma(N)$ – сумма квадратов натуральных делителей натурального числа N. Заметим, что для любых двух взаимно простых натуральных чисел a и b справедливо равенство: $\sigma(ab)=\sigma(a)\cdot\sigma(b)$. Действительно, любой делитель произведения ab есть произведение делителя a и делителя b. И наоборот: умножив делитель a на делитель b, поучим делитель произведения ab. Это же, очевидно, верно и для квадратов делителей (квадрат делителя произведения равен произведению квадратов делителей сомножителей и наоборот).

Рассмотрим разложение числа N на простые множители: $N=p_1^{k_1}\cdot K\cdot p_n^{k_n}$. Здесь p_i – попарно различны простые числа, и все $k_i\in N$. Тогда $\sigma(N)=\sigma\left(p_1^{k_1}\right)\cdot K\cdot\sigma\left(p_n^{k_n}\right)$ и

$\sigma\left(p^k\right)=1+p^2+p^4+K\; p^{2k}$. Поскольку $1800=2^3\cdot 3^2\cdot 5^2$, то

$$\sigma(1800)=\left(1+2^2+2^4+2^6\right)\cdot\left(1+3^2+3^4\right)\cdot\left(1+5^2+5^4\right)=5035485.$$

Ответ: 5035485.

10. Имеются таблицы А и В, в ячейки которых вписаны целые числа. С таблицей А можно проделывать следующие действия: 1) прибавлять к строке другую строку, умноженную на произвольное целое число; 2) прибавлять к столбцу другой столбец, умноженный на произвольное целое число. (Например, если к первой строке таблицы А прибавить вторую строку, умноженную на 4, то получится таблица, изображенная на рисунке справа после слова *пример*.) Найти значение неизвестного элемента x в таблице В, для которого таблица В может быть получена из таблицы А в результате некоторого количества указанных действий.

Таблица А

1	0
0	2

Таблица В

6	2
x	7

Пример

1	8
0	2

Решение: Если таблица 2 получена из таблицы 1 одним из указанных действий, то $a_1d_1-b_1c_1=a_2d_2-b_2c_2$, что для таблиц А и В выполнено при условии, что x – решение уравнения $2=42-2x$.

Таблица 1

a_1	b_1

Таблица 2

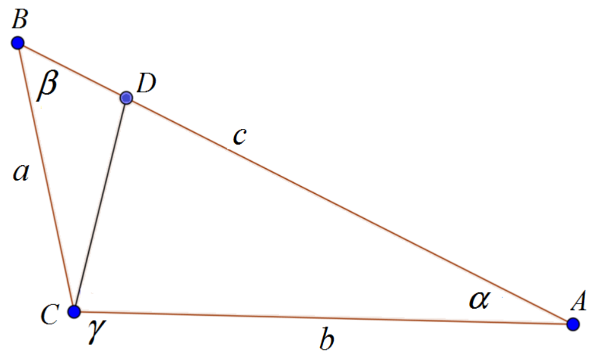
a_2	b_2

c_1	d_1

c_2	d_2

Ответ: 20.

11. В треугольнике со сторонами a,b,c и углами α,β,γ выполнено равенство $3\alpha+2\beta=180^0$. Стороны a,b,c лежат соответственно напротив углов α,β,γ. Найти длину стороны c при $a=2, b=3$



Решение: Из условия следует, что $c>b$. Найдем на отрезке AB точку Dтакую, что $AC=AD$. Тогда треугольник ACDравнобедренный и $\angle ACD=\angle ADC=90°-\alpha/2$.Угол ADC – внешний угол треугольника CBD. Значит, $\angle BCD+\beta=\angle ADC=90°-\frac{\alpha}{2}=\alpha+\beta$. Значит $\angle BCD=\alpha$, и треугольникиCDи ABCподобны. Имеем $\frac{BD}{BC}=\frac{BC}{AB}$ или $\frac{c-b}{a}=\frac{a}{c}$, откуда следует $a^2+bc-c^2=0$. Квадратное уравнение $c^2-3c-4=0$ имеет единственный положительный корень $c=4$.

Ответ: 4.

12. Найти число матриц, удовлетворяющих двум условиям:

5) матрица имеет вид $\begin{pmatrix}1 & * & * \\ * & 1 & * \\ * & * & 1\end{pmatrix}$, где каждая * может принимать значение 0 или 1

6) строки матрицы не повторяются.

Решение: Обозначим через A множество матриц, удовлетворяющих условию 1) и через B - подмножество множества A, состоящее из матриц, удовлетворяющих условию 2). Требуется найти число элементов множества B. Пусть $A_{ij}, i, j\in\{1,2,3\}, i\neq j,$ – подмножество множества A, состоящее из матриц, в которых совпадают строка i и j. Тогда $B=A\backslash(A_{12}\cup A_{23}\cup A_{13})$ и $|B|=|A|-|A_{12}\cup A_{23}\cup A_{13}|$.Мощность $|A_{12}\cup A_{23}\cup A_{13}|$ удобно вычисляется по формуле включения-исключения:

$|A_{12}\cup A_{23}\cup A_{13}|=|A_{12}|+|A_{23}|+|A_{13}|-|A_{12}\cap A_{23}|-|A_{13}\cap A_{23}|-|A_{12}\cap A_{13}|+|A_{12}\cap A_{23}\cap A_{13}|$.

Легко вычислить мощности множеств, фигурирующих в этом выражении:

$|A_{12}|=|A_{23}|=|A_{13}|=2^3$, $|A_{12}\cap A_{23}|=|A_{13}\cap A_{23}|=|A_{12}\cap A_{13}|=|A_{12}\cap A_{23}\cap A_{13}|=1$.

Получим $|B|=2^6-3\cdot 2^3+3-1=42$.

Ответ: 42